1 Lagrange-Formalismus

In der gestrigen Vorlesung haben wir die Beschreibung eines physikalischen Systems mit Hilfe der Newton'schen Axiome kennen gelernt. Oft ist es aber nicht so einfach die Kraftbilanz aufzustellen, da das System äußeren Zwangskräften unterworfen ist, die die Bewgungsfreiheit einschränken und die schwierig zu beschreiben sind. Wir werden heute mit dem Lagrange-Formalismus eine elegante Art kennenlernen für solche Systeme die DGLs aufzustellen.

1.1 Zwangsbedingungen

Wir charakterisieren die Einschränkung der Bewegung durch sogenannte Zwangsbedingungen. Als Beispiel sei hier das Fadenpendel genannt. Das Pendel schwingt nur in einer Ebene. Zudem ist die Länge des Pendels l fest. Damit ergeben sich folgende Zwangsbedingungen

$$z(t) = 0$$
$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

Die Zahl der Zwangsbedingungen reduziert die Freiheitsgrade des Systems. Das Fadenpendel mit ursprünglich drei Freiheitsgraden hat nun also nur noch einen Freiheitsgrad. Um das ganze direkt im Newton Formalismus zu behandeln müssten wir den Ansatz

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{Z}$$

machen mit der Zwangskraft $\mathbf{Z}$, die die Einschränkungen durch die Zwangsbedingungen beschreibt. Mit den Lagrange-Gleichungen 1. Art kann die Zwangskraft bestimmt werden und die DGL gelöst werden. Zuerst aber führen wir noch folgende Begriffe ein

Definition 1.1 *Eine holonome Zwangsbedinung für ein System von N Teilchen hat die folgende Form*

$$g_i(\mathbf{r}_1, .., \mathbf{r}_N, t) = 0.$$

Ist die Zwangsbedingung nicht explizit zeitabhängig, so heißt sie skleronom, ansonsten rheonom.

Anholonome Zwangsbedinungen können z.B. Ungleichungen sein. Wir werden uns aber auf holonome Zwangsbedingungen beschränken.

1.2 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Wir stellen nun die Lagrangegleichungen 1. Art auf. Es sei ein System gegeben, welches m holonomen Zwangsbedingungen $g_i(\mathbf{r}, t) \quad i \in 1, .., m$ unterliegt. Die Zwangskraft $\mathbf{Z}_i$, die die Einschränkung der Bewegung in die durch g_i gegebenen Ebene sicher stellt, steht orthogonal zu dieser Ebene ($\mathbf{Z}_i || \nabla g_i(\mathbf{r}, t)$). Wir verwenden die Methode der Lagrangemultiplikatoren λ_i (vgl. Analysis II) mit dem Ansatz für die Zwangskraft

$$\mathbf{Z}_i = \lambda_i(t) \nabla g_i(\mathbf{r}, t).$$

Damit ergibt sich folgende Bewegungsgleichung (Lagrangegleichungen 1. Art)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \nabla g_i(\mathbf{r}, t).$$

Diese enthält (3+m) zu bestimmende Größen ($x, y, z, \lambda_1, .., \lambda_m$). Die drei DGLs zusammen mit den m Zwangsbedingungsgleichungen erlauben es diese zu lösen und damit sowohl die Trajektorie als auch die Zwangskräfte explizit zu bestimmen.

1.3 Kochrezept: Lagrangegleichungen 1. Art

Disclaimer: Die Lagrangegleichungen 1. Art sollten nur verwendet werden, wenn nach den Zwangskräften gefragt wird oder dies explizit verlangt wird. Meistens ist es praktischer die Lagrangegleichungen 2. Art zu verwenden.

1. Aufstellen der Zwangsbedingungen $g_i(\mathbf{r}, t) = 0$
2. Berechnen der Gradienten der Zwangsbedingungen $\nabla g_i(\mathbf{r}, t)$
3. Aufstellen der Lagrangegleichungen 1. Art mit den Lagrange-Multiplikatoren λ

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \nabla g_i(\mathbf{r}, t)$$

4. Lösen des Gleichungssytems aus DGL + Zwangsbedingungen (zweimaliges Differenzieren der Zwangsbedingungen)

1.4 Beispiel: Fadenpendel

Wir behandeln das Fadenpendel-Problem mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 1. Art. Die Zwangsbedingungen lauten

$$g_1 = z(t) = 0$$
$$g_2 = x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

Wir berechnen ∇g_i

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lagrangegleichungen 1. Art lauten also

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_2(2x) \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda_2(2y) \\ m\ddot{z} &= \lambda_1 \end{aligned}$$

Durch die erste Zwangsbedingung ist z bereits bestimmt und daraus folgt durch zweimaliges Differenzieren der Zwangsbedingung $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Wir hätten diese Koordinate natürlich auch von Anfang an weglassen können. Wir differenzieren nun die zweite Zwangsbedingung zweimal und erhalten

$$2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0.$$

Hier setzen wir die DGL für $\ddot{x}, \ddot{y}$ ein und lösen sie die Gleichung dann nach λ_2 auf. Für $x^2 + y^2$ wir wieder die Zwangsbedingung ein.

$$\begin{aligned} 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + \lambda_2 \tfrac{4}{m} x^2 + \lambda_2 \tfrac{4}{m} y^2 - 2gy = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{\frac{mg}{2} y - \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{l^2} \end{aligned}$$

Dies setzen wir wieder in die DGL ein und erhalten folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{\frac{mg}{2} y - \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{l^2}(2x) \\ m\ddot{y} &= -mg + \frac{\frac{mg}{2} y - \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{l^2}(2y) \end{aligned}$$

und umformen ergibt die Form

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \tfrac{1}{l^2}\left(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2\right) x \\ \ddot{y} &= -g + \tfrac{1}{l^2}\left(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2\right) y. \end{aligned}$$

Dies ist nicht besonders schön zu lösen aber die Zwangskräfte sind jetzt bestimmt.

1.5 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Bei m Zwangsbedingung sind für ein N Teilchen System nur $f = 3N - m$ Freiheitsgrade voneinander unabhängig. Wir können das System also durch die Angabe von f Koordinaten vollständig beschreiben. Dazu führen wir generalisierte Koordinaten $q_1, .., q_f$ ein und transformieren unsere alten Koordinaten in das neue System

$$x_i = x_i(q_1, .., q_f, t) \quad \forall i \in \{1, .., 3N\}.$$

In diesen generalisierten Koordinaten stellen die Zwangskräfte keine Einschränkung da. Wir führen die Lagrangefunktion L ein

$$L(q_1, .., q_f, \dot{q}_1, .., \dot{q}_f, t) = T(q_1, .., q_f, \dot{q}_1, .., \dot{q}_f, t) - V(q_1, .., q_f, \dot{q}_1, .., \dot{q}_f, t)$$

als Differenz von kinetischer und potentieller Energie ausgedrückt durch die generalisierten Koordinaten. Mit der Lagrangefunktion können wir die Bewegungsgleichungen aufstellen (Euler-Lagrangegleichungen oder Lagrangegleichungen 2. Art)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, .., f$$

Dies ist ein System von f Differentialgleichungen. Das Aufstellen der Lagrangefunktion ist meistens wesentlich einfacher als das Aufstellen der Bewegungsgleichungen.

1.6 Kochrezept: Lagrangegleichungen 2. Art

1. Aufstellen der Zwangsbedingungen
2. Wahl von Koordinaten, die die Zwangsbedingungen erfüllen
3. Aufstellen der Transformation von kartesischen Koordinaten zu den generalisierten Koordinaten
4. Aufstellen der Lagrangefunktion in diesen Koordinaten
5. Ableitung der Lagrangegleichungen 2. Art
6. Lösen der DGL in den generalisierten Koordinaten

1.7 Beispiel: Fadenpendel

Wir behandeln nun das Fadenpendel mit den Lagrangegleichungen 2. Art. Die Zwangsbedingungen lauten

$$z(t) = 0$$
$$x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

Für dieses Problem sind Polarkoordinaten mit $\rho = l$ geeignet, zudem können wir direkt $z = 0$ setzen. Die Transformation in diese generalisierten Koordinaten lautet also

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} l\sin\phi \\ l\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ϕ ist unser einziger Freiheitsgrad. Die Geschwindigkeit in den generalisierten Koordinaten lautet

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} l\dot{\phi}\cos\phi \\ -l\dot{\phi}\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit stellen wir die Lagrangefunktion auf

$$\begin{aligned} L = T - V &= \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - mgy \\ &= \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi \end{aligned}$$

und leiten die Bewegungsgleichung ab

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml^2\dot{\phi}\right) + mgl\sin\phi &= 0 \\ ml^2\ddot{\phi} &= -mgl\sin\phi \\ \Leftrightarrow \ddot{\phi} &= -\frac{g}{l}\sin\phi. \end{aligned}$$

Diese Bewegungsgleichung ist um einiges einfacher als die Gleichungen, die wir mit Lagrange 1. Art erhalten haben.

1.8 Beispiel: Doppelpendel

Wir stellen die Zwangsbedingungen für das in Abbildung 1 gezeigte Doppelpendel auf. Das Pendel bewegt sich nur in einer Ebene und die Längen des Pendels l_1, l_2 sind fest.

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= 0 \\ x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

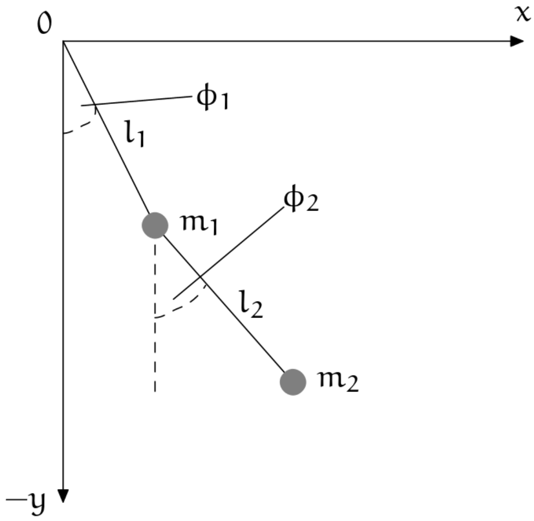

Abbildung 1: Doppelpendel

Als generalisierte Koordinaten bieten sich ϕ_1, ϕ_2 an. Die Transformation lautet

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \sin\phi_1 \\ l_1 \cos\phi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} l_1\dot{\phi}_1 \cos\phi_1 \\ -l_1\dot{\phi}_1 \sin\phi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2 \\ l_1 \cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} l_1\dot{\phi}_1 \cos\phi_1 + l_2\dot{\phi}_2\cos\phi_2 \\ -l_1\dot{\phi}_1 \sin\phi_1 - l_2\dot{\phi}_2 \sin\phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst $\dot{\mathbf{r}_2}^2$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}_2}^2 &= \left(l_1\dot{\phi}_1\cos\phi_1 + l_2\dot{\phi}_2\right)^2 + \left(-l_1\dot{\phi}_1\sin\phi_1 - l_2\dot{\phi}_2\sin\phi_2\right)^2 \\
&= l_1^2\cos^2\phi_1\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\cos^2\phi_2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos\phi_1\cos\phi_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + l_1^2\sin^2\phi_1\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\sin^2\phi_2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\sin\phi_1\sin\phi_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \\
&= l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\underbrace{(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2)}_{\text{Additionstheorem:}=\cos(\phi_1-\phi_2)}\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \\
&= l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2
\end{aligned}$$

Wir stellen die Lagrangefunktion auf

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_1 g y_1 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + m_2 g y_2 \\
&= \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\phi_1}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right) + m_1 g l_1\cos\phi_1 + m_2 g\left(l_1\cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\phi_1}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right) + (m_1+m_2)gl_1\cos\phi_1 + m_2 g l_2\cos\phi_2
\end{aligned}
$$

Hieraus leiten wir die Lagrangegleichungen 2. Art für ϕ_1 und ϕ_2 ab

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial\phi_1} = 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((m_1+m_2)l_1^2\dot{\phi}_1 + m_2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_2\right) + (m_1+m_2)gl_1\sin\phi_1 + m_2\sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = 0 \\
\Leftrightarrow &(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\phi} + m_2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\ddot{\phi}_2 - m_2l_1l_2\sin(\phi_1-\phi_2)\left(\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_2^2\right) + m_2l_1l_2\sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = -(m_1 \\
\Leftrightarrow &(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\phi}_1 + m_2l_1l_2\left(\cos(\phi_1-\phi_2)\ddot{\phi}_2 + \sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_2^2\right) = -(m_1+m_2)gl_1\sin\phi_1 \\
\Leftrightarrow &\ddot{\phi}_1 = -\frac{g}{l_1}\sin\phi_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\left(\cos(\phi_1-\phi_2)\ddot{\phi}_2 + \sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_2^2\right)
\end{aligned}
$$

Analog folgt

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial\phi_2} = 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2l_2^2\dot{\phi}_2 + m_2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\right) - m_2\sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + m_2gl_2\sin\phi_2 = 0 \\
\Leftrightarrow &m_2l_2^2\ddot{\phi}_2 + m_2l_1l_2\left(\cos(\phi_1-\phi_2)\ddot{\phi}_1 - \sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1^2 + \sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right) - m_2l_1l_2\sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = -m_2gl_2 \\
\Leftrightarrow &m_2l_2^2\ddot{\phi}_2 = -m_2gl_2\sin\phi_2 - m_2l_1l_2\left(\cos(\phi_1-\phi_2)\ddot{\phi}_1 - \sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1^2\right) \\
\Leftrightarrow &\ddot{\phi}_2 = -\frac{g}{l_2}\sin\phi_2 - \frac{l_1}{l_2}\left(\cos(\phi_1-\phi_2)\ddot{\phi}_1 - \sin(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1^2\right)
\end{aligned}
$$

Wir können also auch für relativ komplexe Systeme bequem die Bewegunsgleichungen mit dem Lagrange-Formalismus aufstellen.

1.9 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Aus der Lagrangefunktion lässt sich nicht nur die Bewegungsgleichung ableiten sondern man kann auch etwas über die Erhaltungsgrößen des Systems lernen. Wie wir gestern bereits gesehen haben, vereinfacht die Kenntnis von Erhaltungsgrößen die Lösung der DGLs beträchtlich. Zwischen der Symmetrie eines Systems d.h. einer Transformation, die die Lagrangefunktion bis auf eine totale Zeitableitung invariant lässt, und der zugehörigen Erhaltungsgröße gibt es einen eindeutigen Zusammenhang, der allgemein durch das Noether-Theorem beschrieben wird.

Satz 1.1 (Noether Theorem) *Sei eine lokale Transformation gegeben $q_i \mapsto q_i' = q_i(t,\alpha)$ sodass sich die Lagrangefunktion unter der Transformation nur um eine totale Zeitableitung ändert*

$$\left.\frac{\partial L(x(t,\alpha),\dot{x}(t,\alpha),t)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt}K(x,t).$$

Dann ist die Größe Q

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left.\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} - K$$

eine Erhaltungsgröße.

Wir betrachten hier 2 Spezialfälle.

1.9.1 Impulserhaltung

Hängt die Lagrangefunktion von einer Koordinate q_i nicht explizit ab so ergibt sich aus der Euler-Lagrangegleichung direkt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \mathrm{const}.$$

Wir nennen diese Größe den zu q_i konjugierten Impuls. Die Impulserhaltung entspricht der Translationsinvarianz dieser Koordinate. Dies zeigen wir durch Verwendung des Noether-Theorems. Die Transformation lautet $q_i \mapsto q_i + \alpha$. Da die Lagrangefunktion nicht von q_i explizit abhängt ist $L(q_i') = L(q_i) \Leftrightarrow K = 0$. Damit lautet die Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\underbrace{\left.\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}}_{=1} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned}$$

1.9.2 Energieerhaltung

Wir betrachten die Transformation $t \mapsto t + \alpha$ (Zeitranslation). Diese resultiert in der Koordinatentransformation $q_i \mapsto q_i(t+\alpha)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} &= \left.\frac{\partial q_i}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \\ &= \dot{q}_i. \end{aligned}$$

Wir berechnen K falls L nicht explizit von der Zeit abhängt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(x,t) &= \frac{\partial L(x(t,\alpha),\dot{x}(t,\alpha),t)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Dann lautet die Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L.$$

Diese Größe definieren wir als Energie des Systems.

2 Hamilton-Formalismus

Die Hamiltonsche Mechanik spielt praktisch nicht so eine große Rolle, ist aber ein wichtiges Element der Theorie besonders für den Übergang zur Quantenmechanik.

2.1 Hamiltonsche Gleichungen

Wir definieren zu jeder Koordinate q_i den generalisierten Impuls p_i

$$p_i = \frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Wir wollen nun eine Funktion definieren, die nicht mehr von $q_i, \dot{q}_i, t$ abhängt sondern von q_i, p_i, t. Wir können die Gleichung für p_i nach $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i, t)$ auflösen und stellen damit die Hamiltonfunktion auf

$$H(q_i,p_i,t) = \sum_j \dot{q}_j(q_j,p_j,t)p_j - L(q_i,\dot{q}_i(q_i,p_i,t),t).$$

Äquivalent zu den Lagrangegleichungen erhalten wir Bewegungsgleichungen (Hamiltonsche Gleichugnen)

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Hierbei handelt es sich um DGL 1. Ordnung, im Unterschied zu den Lagrangegleichungen, die DGLs 2. Ordnung sind. Außerdem ist die Symmetrie zwischen Impuls und Koordinate offensichtlich.
Wir bestimmen die totale Zeitableitung der Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{=\dot{p}_i} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{=-\dot{q}_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}$$

Falls die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Hamiltonfunktion eine Konstante der Bewegung.

2.2 Poisson Klammer

Wir definieren die Poisson-Klammer zweier Größen $F = F(q_i, p_i, t)$, $G = G(q_i, p_i, t)$ durch

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

Die Poisson-Klammer hat folgende Eigenschaften

- $\{F, G\} = -\{F, G\}$ (Antisymmetrie)
- $\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2$ (Produktregel)
- $\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$ (Jacobi-Identität)

Mit der Poissonklammer können wir die Ableitung einer physikalischen Größe $F = F(q_i, p_i, t)$ bequem schreiben

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \underbrace{\dot{q}_i}_{=-\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{=\frac{\partial H}{\partial q_i}} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}$$

Man kann auch q_i, p_i in die Poissonklammer einsetzen. Es ergeben sich die fundamentalen Poissonklammern

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0,\ \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = -\{p_i, q_j\}.$$

2.3 Beispiel: Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Lagrangefunktion

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - \tfrac{m\omega}{2}q^2.$$

(a) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls p und die Hamiltonfunktion. Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf und lösen Sie sie.

(b) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$q \mapsto a = \tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}}p + \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}}q, p \mapsto \tilde{a} = \tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}}p - \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}}q$$

kanonisch ist, indem Sie die Poissonklammer $\{a, \tilde{a}\}$ berechnen. Schreiben Sie die Hamiltonfunktion in Abhängigkeit von $a, \tilde{a}$ und lösen Sie sie.

Lösung (a) Wir bestimmen den zu q kanonischen Impuls p

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\ &= m\dot{q} \\ \Leftrightarrow \dot{q} &= \frac{p}{m}. \end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion lautet

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}p - L \\ &= \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \tfrac{m\omega^2}{2}q^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \tfrac{m\omega^2}{2}q^2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Hamiltonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \frac{\partial H}{\partial q} = kq. \end{aligned}$$

Um diese zu lösen differenzieren wir die erste Gleichung noch einmal und setzen dann die zweite ein. Wir erhalten

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m}q$$

mit Lösung

$$\begin{aligned} q(t) &= Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ p(t) &= \dot{q}m = i\sqrt{km}Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} - i\sqrt{km}Be^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}. \end{aligned}$$

(b) Wir berechnen die Poissonklammer $\{a, \tilde{a}\}$. Wir verwenden die Produktregel

$$\begin{aligned} \{a, \tilde{a}\} &= \tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}} \tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}} \{p, p\} - \tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}} \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}} \{p, q\} + \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}} \tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}} \{q, p\} - \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}} \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}} \{q, q\} \\ &= -\tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}} \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}} (-1) + \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}} \tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Damit gelten für $a, \tilde{a}$ dieselben fundamentalen Poissonklammern wie für p, q und die Transformation ist also kanonisch. Wir schreiben die Hamiltonfunktion in $a, \tilde{a}$ in dem wir p, q in Abhängigkeit von diesen Größen schreiben

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\tfrac{im\omega}{2}} (a + \tilde{a}) \\ q &= \tfrac{1}{\sqrt{2im\omega}} (a - \tilde{a}) \, . \end{aligned}$$

Damit lautet die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \tfrac{m\omega}{2} q^2 \\ &= \tfrac{1}{2m} \tfrac{im\omega}{2} (a + \tilde{a})^2 + \tfrac{m\omega^2}{2} \tfrac{1}{2im\omega} (a - \tilde{a})^2 \\ &= \tfrac{i\omega}{4} \left(a^2 + \tilde{a}^2 + 2a\tilde{a}\right) - \tfrac{i\omega}{4} \left(a^2 + \tilde{a}^2 - 2a\tilde{a}\right) \\ &= i\omega a\tilde{a}. \end{aligned}$$

Wir stellen die Hamiltonschen Gleichungen mit den Poissonklammern auf

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \{a, H\} = i\omega\{a, a\tilde{a}\} \\ &= i\omega a\{a, \tilde{a}\} + i\omega\{a, a\}\tilde{a} \\ &= i\omega a \\ \dot{\tilde{a}} &= \{\tilde{a}, H\} = i\omega\{\tilde{a}, a\tilde{a}\} \\ &= i\omega a\{\tilde{a}, \tilde{a}\} + i\omega\{\tilde{a}, a\}\tilde{a} \\ &= -i\omega\tilde{a} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht durch einen Exponentialansatz lösen

$$a = Ae^{i\omega t}, \, \tilde{a} = Be^{-i\omega t}.$$